Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет   
«Московский институт электронной техники»

Кафедра высшей математики №1

Стадник Александр Михайлович

Лабораторная работа № 1

по теме «Этапы построения математической модели»

Направленность (профиль) «Применение математических методов к решению инженерных и естественнонаучных задач»

Задача о футболисте

Студент Стадник А.М

Москва 2022

Объект исследования задачи

Задача

# Содержательная постановка задачи

Разработать математическую модель, позволяющую описать удар футбольного мяча ворота. Модель должна:

* Сформулировать условие попадания мяча в створ ворот
* Найти на поле область, из которой игрок попадет в ворота соперника при заданном угле удара и скорости удара, изменяя угол между линией ворот и плоскостью удара.

Исходные данные:

* Скорость мяча при ударе
* Угол удара мяча α
* Координаты ворот ,
* Длина и ширина поля
* Ширина и высота ворот

# Концептуальная постановка задачи

Движение футбольного мяча может быть описана в соответствии с законом классической механики Ньютона. Применим следующие гипотезы:

* Объектом моделирования является футбольный мяч, который мы принимаем за материальную точку.
* Движение происходит в поле силы тяжести с постоянным ускорением свободного падения .
* Движения мяча происходит в одной области, перпендикулярно поверхности земли и проходящий через точку середины ворот.
* Пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча вокруг центра масс.
* Ворота располагаются ровно по середине короткой кромки поля.

На основе гипотез имеем следующие выводы:

* В качестве параметров движения мяча можем использовать его координаты и соответствующие проекции скорости . Для определения положения мяча нужно найти зависимость этих координат от времени .
* Попадание мяча в ворота означает, что он находится в пределах ширины и высоты ворот при пересечении их плоскости.

Сокращенная формулировка задачи концептуальной постановки задачи:

* Определить закон движения материальной точки при заданных координатах начала движения, начальной скорости и направлении начала движения. Вычислить координаты мяча при пересечении плоскости ворот и определить, входят ли они в пределы ворот.

# Математическая постановка задачи

Угол вычисляется, как угол между плоскостью перпендикулярной поверхности земли и проходящий через точку середины ворот и поверхности земли и проходящий через верхний или нижний край ворот (нижний, если координата начала удара по ширине меньше координаты центра ворот и верхней, если больше)

Проекции скорости на основании заданных углов удара:

Координаты мяча в момент времени t:

# Качественный анализ и проверка конкретности модели

Контроль размерности:

* Скорость и её проекции имеют размерность , координаты - м, время - с, ускорение свободного падения - . При таких размерностях все используемые формулы работают корректно.

# Выбор и обоснование методов решения

# Аналитический (численный) метод

from numpy import \*

from matplotlib.patches import \*

import matplotlib.pyplot as plt

import math

import numpy as np

V0 = (float(input("Введите скорость мяча после удара (м/с): ")))

alpha0 = math.radians(

float(input("Введите угол, под которым был ударен мяч (градусы): ")))

g = 9.8

fieldLength, fieldWidth = 105, 68,

gateHeight, gateWidth = 2.44, 7.32

gateX = fieldLength

gateYMiddle, gateYBottom, gateYUpper = fieldWidth / 2, fieldWidth / 2 - \

gateWidth / 2, fieldWidth / 2 + gateWidth / 2

gateUpperCords = np.array([gateX, gateYUpper])

gateMiddleCords = np.array([gateX, gateYMiddle])

gateBottomCords = np.array([gateX, gateYBottom])

gateButtomCords = np.array([gateX, gateYBottom])

gateUpperCords = np.array([gateX, gateYUpper])

maxLength = math.floor((V0\*\*2 \* math.sin(2 \* alpha0)) / g)

maxTime = 2 \* V0 \* math.sin(alpha0) / g

print("V0: ", V0)

print("maxLength: ", maxLength)

print("math.sin(alpha0): ", math.sin(alpha0))

print("maxTime: ", maxTime)

def rotate(origin, point, angle):

R = np.array([[np.cos(angle), -np.sin(angle)],

[np.sin(angle), np.cos(angle)]])

o = np.atleast\_2d(origin)

point = np.atleast\_2d(point)

return np.squeeze((R @ (point.T-o.T) + o.T).T)

def dotproduct(v1, v2):

iter = ((a \* b) for a, b in zip(v1, v2))

return np.sum(np.fromiter(iter, float))

def length(v):

return math.sqrt(dotproduct(v, v))

def angleBetween(v1, v2):

if length(v1) \* length(v2) == float(0):

return 0

return math.acos(dotproduct(v1, v2) / (length(v1) \* length(v2)))

def checkIntersection(A, B, C):

return (C[1] - A[1]) \* (B[0] - A[0]) > (B[1] - A[1]) \* (C[0] - A[0])

def isIntersect(A, B, C, D):

return checkIntersection(A, C, D) != checkIntersection(B, C, D) and checkIntersection(A, B, C) != checkIntersection(A, B, D)

def isScored(playerX, playerY):

playerCords = np.array([playerX, playerY])

goalCordsWithoutRotate = np.array([playerX + maxLength, playerY])

angle = angleBetween(np.array(gateMiddleCords - playerCords),

np.array(goalCordsWithoutRotate - playerCords),)

if playerY > fieldWidth / 2:

angle = -angle

goalCords = rotate(playerCords, goalCordsWithoutRotate, angle)

if (isIntersect(playerCords, goalCords, gateBottomCords, gateUpperCords)):

timeToGate = (fieldLength - playerX) / \

(V0 \* math.cos(angle) \* math.cos(alpha0))

if timeToGate > maxTime:

timeToGate = 0

isHop = V0 \* math.sin(alpha0) \* timeToGate - \

(g \* timeToGate\*\*2) / 2 > gateHeight

if not isHop:

return True

return False

return False

fig = plt.figure()

fig.set\_size\_inches(7, 5)

ax = fig.add\_subplot(1, 1, 1)

Pitch = Rectangle([0, 0], width=fieldLength, height=fieldWidth, fill=False)

Gate = Rectangle(

[fieldLength - 0.5, fieldWidth / 2 - gateWidth / 2], width=1, height=gateWidth, fill=True)

element = [Pitch, Gate]

for i in element:

ax.add\_patch(i)

plt.ylim(-2, 82)

plt.xlim(-2, 122)

plt.axis('off')

print('Вычисляем...')

for playerX in range(fieldLength + 1):

for playerY in range(fieldWidth + 1):

if isScored(playerX, playerY):

ax.add\_patch(plt.Circle((playerX, playerY), 0.6, color="black"))

print('БУМ!')

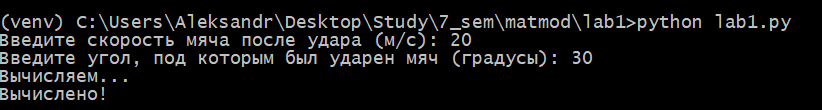
plt.show()

# Проверка адекватности модели

Данная математическая модель для решения поставленной задачи адекватна. Модель может быть усовершенствована путем добавления дополнительных параметров объектов, таких как вращение и инерция. Данную модель можно применять для примерно обнаружения области попадания мяча при заданных параметрах.

# Практическое использование построенной модели

Пример работы программы:



(Вид сверху; закрашенная область - область, из которой можно попасть в ворота заданным ударом, ворота обозначены красной линией):

